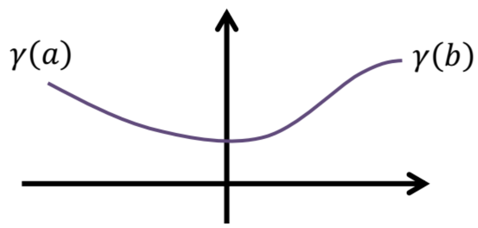
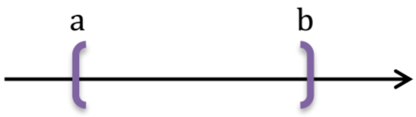
المحاضرة التاسعة

التكامل العقدي:

تعريف المنحني العقدي:

هو مجموعة المواضع المرتبة لقيمة تابع عقدي $\gamma(t)$ مستمر على مجالٍ مغلق $[a,b]$عندما تمسح t المجال من a إلى b، أي هو مسار $\gamma(t)$ عندما تمسح t المجال $[a,b]$ من بدايته إلى نهايته.





نُسمّي $\gamma(a)$ بداية المنحني ونُسمّي $\gamma(b)$ نهاية المنحني، ونقول إنّ المنحني موجّه من $\gamma(a)$ إلى $\gamma(b)$. كما نُسمّي التابع γ تمثيلاً وسيطياً لذلك المنحني.

إذا كانت $\gamma(a) = \gamma(b)$ فإنّنا نقول إنّ المنحني مغلق.

تكامل تابع عقدي لمتحولٍ حقيقي:

ليكن $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ تابعاً عقدياً لمتحولٍ حقيقي عندئذٍ:

1. مجموعة تعريف γ تساوي تقاطع مجموعتي تعريف x, y.
2. $\lim\limits_{t\to t_0} \gamma(t)$ موجودة $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)$ و $\lim\limits_{t\to t_0} y(t)$ موجودتين، وأن:

$$\lim_{t\to t_0} \gamma(t) = L \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} x(t) = Re\,(L) \quad , \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = Im(L)$$

وفي حال وجود النهاية، هذا يعني تحقق المساواة:

$$\lim_{t\to t_0} \gamma(t) = \lim_{t\to t_0} x(t) + i \lim_{t\to t_0} y(t)$$

3. γ مستمر عند t_0 يكافئ أن x, y مستمران عند t_0.
4. γ مستمر على مجال I يكافئ أن x, y مستمران على I.

ملاحظة:

حتى يكون تابع مستمراً عند نقطة "يجب أن تكون هذه النقطة داخلية في منطلقه".

- نقول عن تابعٍ إنّه مستمر على مجال مغلق إذا كان مستمرا عند كل نقطة من داخل هذا المجال ومستمرا من اليمين عند حده الأدنى ومستمرا من اليسار عند حده الأعلى.

5. γ قابل للاشتقاق عند t_0 يكافئ أن x, y قابلان للاشتقاق عند t_0.

وإذا كان γ قابلاً للاشتقاق عند t_0 فإنّ $\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$.

أيضاً يكون γ قابلاً للاشتقاق على مجالٍ مفتوح $]a,b[$ إذا وفقط إذا كان x,y قابلان للاشتقاق على ذلك المجال.

ويكون γ قابلاً للاشتقاق على مجالٍ مغلق $[a,b]$ إذا وفقط إذا كان γ قابلا للاشتقاق على المجال المفتوح $]a,b[$ وقابل للاشتقاق عند a من اليمين، وعند b من اليسار.

مثال: هل التابع γ المعرف بالمساواة $\gamma(t) = e^{it}$ قابل للاشتقاق على المجال $[0,2\pi]$.

الحل: لدينا

$$\gamma(t) = \cos(t) + i\, sin\,(t)$$

$$x(t) = \cos t\,, \quad y(t) = \sin t$$

إنّ γ قابل للاشتقاق على $[0,2\pi]$، وذلك لأنّ x,y قابلان للاشتقاق على $[0,2\pi]$ لأنّ $\cos t\,,\sin t$ قابلان للاشتقاق على $\mathbb{R}$، وبالتالي قابلان للاشتقاق على أي مجال جزئي من $\mathbb{R}$. وإن:

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t) = -\sin(t) + i\cos(t)$$

طريقة ثانية: $e^{g(t)}$ قابل للاشتقاق على مجموعة قابلية اشتقاق الأس، كما أنّ:

$$\frac{d\left(e^{g(t)}\right)}{dt} = g'(t)e^{g(t)}$$

وبالتالي:

$$\gamma'(t) = \left(e^{it}\right)' = ie^{it}$$

6. $F(t)$ تابع أصلي لـ $f(t)$ على مجال I يكافئ أن $\forall t \in I\ :\ F'(t) = f(t)$، وهذا يقتضي أن $F(t) = X(t) + iY(t)$ تابع أصلي لـ $f(t) = x(t) + iy(t)$ على مجال I إذا وفقط إذا كان $X(t)$ تابعا أصليا لـ $x(t)$ على I، و $Y(t)$ تابعا أصليا لـ $y(t)$ على I.

مثال:

$F(t) = \sin t + i\, ln\,(t)$ هو تابع أصلي لـ $f(t) = \cos t + i\frac{1}{t}$ على المجال $]0,\infty[$.

مثال:

$F(t) = \sin t + i\, ln\,|t|$ هو تابع أصلي لـ $f(t) = \cos t + i\frac{1}{t}$ على المجموعة المفتوحة $]-\infty,0[\cup]0,\infty[$.

7. $f(t) = x(t) + iy(t)$ كمول على مجال $[a,b]$ إذا وفقط إذا كان $x(t),y(t)$ كمولين على $[a,b]$. وفي حال قابلية المكاملة يكون :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i\int_a^b y(t)\,dt$$

مبرهنة: إذا كان f تابعاً عقدياً مستمراً على $[a,b]$ فإنّ f كمول على $[a,b]$.

مبرهنة: إذا كان f تابعاً عقدياً مستمراً على $[a,b]$، و $F(t)$ تابع أصلي على $[a,b]$ فإنّ :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

مثال: احسب التكامل التالي $\int_0^1 \frac{1}{1+it}\,dt$.

الحل:

<u>طريقة أولى:</u> بضرب بسط ومقام المكامل بمرافق المقام نجد:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+it}\,dt = \int_0^1 \frac{1-it}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - i\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$= [Arg\ tg\ (t)]_0^1 - i\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{\pi}{4} - 0\right] - \frac{i}{2}[\ln 2 - 0] = \frac{\pi}{4} - i\frac{ln\ 2}{2}$$

<u>طريقة ثانية:</u>

ليكن $g(t) = 1 + it$، عندئذ فإن $g([0,1])$ تساوي القطعة المستقيمة $[1,1+i]$. بما أن الفرع الرئيسي Log تحليلي على $\mathbb{C}\backslash Ox^-$، وبالتالي قابل للاشتقاق على $g([0,1])$ المحتواة في $\mathbb{C}\backslash Ox^-$، فإن $Log\ \circ g$ قابل للاشتقاق على المجالٍ $[0,1]$، ويعطى مشتقه بالمساواة:

$$\frac{d}{dt}\big(Log\ (1+it)\big) = \frac{i}{1+it}$$

بالنتيجة فإن التابع $\frac{1}{i}Log\ (1+it)$ تابع أصلي لـ $\frac{1}{1+it}$ على المجال $[0,1]$. وبالتالي فإن:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+it}\,dt = \frac{1}{i}[Log\ (1+it)]_0^1 = \frac{1}{i}[Log\ (1+i) - Log\ (1)]$$

$$= \frac{1}{i}\left[(\ln|1+i| + i\frac{\pi}{4}) - 0\right] = \frac{\pi}{4} - i\ln\sqrt{2} = \frac{\pi}{4} - i\frac{\ln 2}{2}$$

ملاحظة: إنّ $e^{g(t)}$ هو تركيب لتابعين الأول يقرن كل متحول حقيقي بعدد عقدي والثاني هو التابع الأسي العقدي الذي يقرن كل عدد عقدي بعددٍ عقدي. أي : $t \xrightarrow{g} g(t) \xrightarrow{e^z} e^{g(t)}$.

تمرين: أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt = \left[\frac{1}{i}e^{it}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{i}\left[e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i0}\right] = \frac{1}{i}[i-1] = 1+i$$

...انتهت المحاضرة التاسعة...